11ο μάθημα

$\boxed{7/1/20}$

Η κυματοσυν/ση περιγράφει την πιθανότητα το στοιχ. σωμ. να βρεθεί στη θέση $\vec{r}$ τη χρονική στιγμή t.

<u>Παρατήρηση</u>: Να επιλυθεί η Δ.Ε. Laplace

$$\text{Π.Σ.Τ.}: \begin{cases} \vec{\nabla}^2 \phi = 0 \\ \text{με Σ.Σ. (4 συνθήκες)} \end{cases}$$

Υποθέτουμε $\phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} X = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = A$$

όπου A σταθερά
είναι στ.θ. γιατί το ένα είναι
παράγωγος ως προς x κ. το
άλλο ως προς y

Η λύση θα είναι της μορφής: $\phi(x,y) = A_2 \sin(x)\cdot\sinh(y)$

1) $\phi(x,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $E = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1,2,3$

2) Αρμονικός ταλαντωτής - ελατήριο (Hooke)

$F = -kx \Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\text{Π.Σ.Τ.}: \begin{cases} \phi'' + (2E - x^2)\phi = 0 \\ \phi(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

α) Για μηδενική ιδιοτιμή, $E = 0$

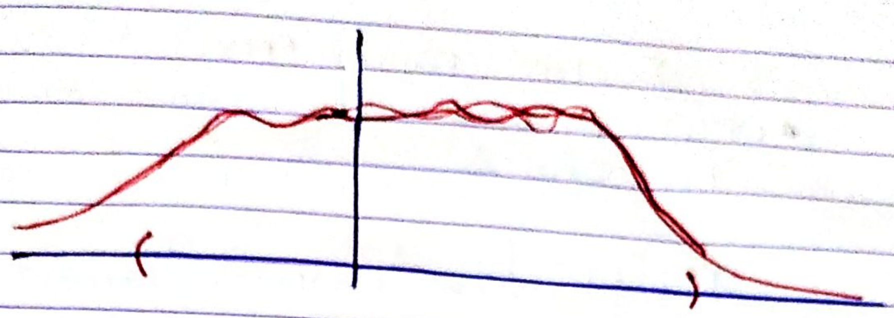
(*) $\phi_\infty'' - x^2\phi_\infty = 0$ μία λύση που επαληθεύει
την (*) είναι η $\phi_\infty = e^{-x^2/2}$, $x \to \pm\infty$

Υποθέτουμε ότι η λύση θα είναι της μορφής:

$\phi(x) = \phi_\infty(x) H(x) = e^{-x^2/2} H(x)$

με $H''(x) - 2xH'(x) + (2E - 1)H = 0$, $E = n + \frac{1}{2}$

$\boxed{H'' - 2xH' + 2nH = 0}$ <u>Δ.Ε. Hermite</u>



ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν μία κυματοσυνάρτηση ψ ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών $A\psi = \alpha\psi$ ενός κβαντομηχανικού τελεστή Α, με ιδιοτιμή α, τότε η αβεβαιότητα ΔΑ του μεγέθους Α, μηδενίζεται.

Δηλαδή: Το μόνο αποτέλεσμα που μπορεί να προκύψει από τις μετρήσεις είναι η ιδιοτιμή α.

Παρατήρηση: Με τον όρο αβεβαιότητας, Δ.Α., ορίζουμε την τυπική απόκλιση $\sigma^2 = (\Delta.A.)^2$, δηλ. τη διασπορά των τιμών γύρω από τη μέση τιμή.

Αρχή αβεβαιότητας ή Αρχή απροσδιοριστίας

Το γινόμενο της αβεβαιότητας θέσης κ' ορμής δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το ήμισυ της στα. Planck $\hbar$. Δηλ: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Φυσική σημασία: Η ταυτόχρονη ακριβής γνώση θέσης κ' ταχύτητας του στοιχ. σωματιδίου είναι αδύνατη.

Συν/ση Γάμμα (Γ(z))

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ο πρώτος ορισμός δίνεται από τον Eul

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\, n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}\cdot n^{z+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\, n^z \cdot \frac{z}{z+n+1}\cdot n$$

$$= \Gamma(z)\cdot z$$

Άρα $\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3 \cdots} n}{(\cancel{1\cdot 2\cdot 3 \cdots} n)(n+1)}\, n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

άρα $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot\Gamma(2) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = 3!$

$\vdots$ z: στθ. σημείο

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$ $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ 2**: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$, $Re(z) > 0$

Μέσω της αντικατάστασης $t = x^2$:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-x^2} (2x)\, \underbrace{x^{2z-2}}_{\frac{x^{2z}}{x^2}}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1}\, dx$$

(1)

Επίσης, με την αντικατάσταση $t = -\ln x$:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_1^{0} e^{\ln x} \cdot (-\ln x)^{z-1} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (-\ln x)^{z-1}\, dx = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx \quad (2)$$

Μπορούμε ν.δ.ο. (1) κ. (2) είναι ισοδύναμες.

Ιδιότητες:

1) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Απόδ.:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

Θέτουμε $t = x^2$ κ. $x = \sqrt{t}$

άρα $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\cancel{x}} \cdot 2\cancel{x}\, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = I \cdot I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (e^{-r^2})\, dr = \frac{\pi}{4}$$

άρα $\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ κ. $\Gamma(1/2) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

2) Αναλυτική συνέχιση

Για $z=-n$ χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

δηλ. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(1/2)}{1/2} = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

3) Τύπος διπλασιασμού

$$\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

ΓΕΝΙΚΑ: $\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{m})\,\Gamma(x+\frac{2}{m})\cdots\Gamma(x+\frac{m-1}{m}) =$

$$= m^{\frac{1}{2}-mx}\cdot(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\Gamma(mx)$$

4) $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Συνάρτηση Βήτα

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $m,n>0$

Μπορούμε ν.δ.ο. $B(m,n) = 2\cdot\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}\,d\theta$

αν θέσουμε $x=\sin^2\theta$

$dx = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

Συσχέτιση $B(m,n)$ με $\Gamma(m)$:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}} \quad , \quad n,m>0$$

ΑΠΟΔ. :

$$\Gamma(m) = 2\cdot\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx$$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\cdot\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

$$= 4\cdot\int_0^\infty\left(\int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\right) dy$$

$$\overset{\text{πολικές}}{\Longleftrightarrow} \Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\cdot\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2} r \, dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n-1}(\cos\theta)^{2m-1} d\theta \cdot \int_0^\infty r^{2m-1+2n\cancel{-1+1}} e^{-r^2} dr$$

$$= 2B(m,n)\cdot\int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr$$

$$= B(m,n)\cdot\Gamma(m+n)$$

$$\Leftrightarrow B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$